Przekształcenia geometryczne w grafice wektorowej

Radosław Mantiuk

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

Wektor

Dla danej n-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej R^n wektor równy jest:

$$\overline{v} \in R^n \Leftrightarrow \overline{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix}, v_i \in R, i = 0,1,\ldots,n-1$$

Działania na wektorach:
- **dodawanie** (rozdzielność dodawania (ang. associativity), łączność dodawania (ang. communitativity), tożsamość (ang. zero identity), dodawanie wektora przeciwnego),
- **mnożenie przez liczbę** (łączność i rozdzielność mnożenia przez skalar),
- **iloczyn skalarny**,
- **długość wektora,**
- **iloczyn wektorowy**

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot v_i \qquad \left|\overline{u}\right| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} u_i^2}$$

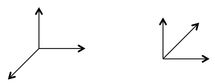
Układ współrzędnych

Układ współrzędnych (układ odniesienia) wyznaczany jest przez liniowo niezależne **wektory bazowe**. Każdy wektor może być reprezentowany przez n wartości skalarnych $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ oraz wektory bazowe $\overline{u_0}, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_{n-1}}$

Wektory są **niezależne liniowo** jeżeli równanie:

$$v_0\overline{u_0} + v_1\overline{u_1} + \ldots + v_{n-1}\overline{u_{n-1}} = 0$$

jest prawdziwe tylko dla $v_0 = v_1 = \ldots = v_{n-1} = 0$



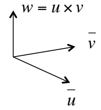
układ prawoskrętny　　układ lewoskrętny

Układ ortonormalny - długość wektorów bazowych równan jest 1.
Układ ortogonalny - układ ortonormalny, w którym kąt między wektorami bazowymi równy jest 90 stopni.

Działania na wektorach

Iloczyn wektorowy

$\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v}$



$$\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v}$$

$$\left|\overline{w}\right| = \left|\overline{u} \times \overline{v}\right| = \left|\overline{u}\right|\left|\overline{v}\right| \cdot \sin\theta$$

$\overline{w} \perp \overline{u}, \overline{w} \perp \overline{v}$

$\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ tworzą układ prawoskrętny

Iloczyn skalarny

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot v_i = \left|\overline{u}\right| \cdot \left|\overline{v}\right| \cdot \cos\theta$$

Macierze

$$M_{wiersz,kolumna} = [m_{ij}]$$

Działania na macierzach:
- dodawanie,
- mnożenie przez liczbę,
- transponowanie,
- mnożenie,
- wyznacznik macierzy,
- macierz odwrotna,
- macierz ortogonalna.

Macierz odwrotna:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [A^D]^T$$

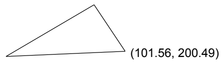
elementy macierzy dopełnień:

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}^A$$

wyznacznik z A, z której usunięto i-ty wiersz i j-tą kolumnę

Grafika wektorowa

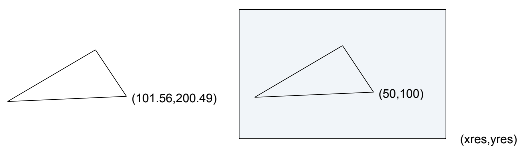
Współrzędne obiektów graficznych definiowane są w dziedzinie liczb rzeczywistych (np. współrzędna wierzchołka trójkąta na płaszczyźnie wyrażona jest przez dwie liczby rzeczywiste).



Transformacja ze współrzędnych rzeczywistych do rastrowych

$$x_{raster} = normal(x) \cdot xres$$
$$y_{raster} = normal(y) \cdot yres$$

Normalizacja sprowadza się do określenia wartości współrzędnych w przedziale <0,1>.



Przekształcenia 2D - Translacja

Translacja o wektor (tx,ty)

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

Przekształcenie odwrotne (ang. inverse translation)

$$x = x' - t_x$$
$$y = y' - t_y$$

Przekształcenie zachowujące pierwotne położenie (ang. identity)

$$x' = x + 0$$
$$y' = y + 0$$

Złożenie translacji jest translacją. Istnieje przekształcenie odwrotne do złożenia translacji.

$$x' = \underbrace{T_1 T_2 T_3 \cdots T_n}_{T'} x$$

Przekształcenia 2D - Obrót

Obrót wokół punktu (początku układu współrzędnych)

$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$$
$$y' = x \sin\theta + y \cos\theta$$

Przekształcenia 2D - Skalowanie

Skalowanie o wektor (sx,sy)

$$x' = s_x \cdot x$$
$$y' = s_y \cdot y$$

Przekształcenia 2D - Rechunek macierzowy

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Współrzędne jednorodne

Współrzędne jednorodne (ang. homogenous coordinates) - umożliwiają złożenie przekształceń za pomocą operacji macierzowych.

Skalowanie (podobieństwo)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translacja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obrót

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia 2D - Przekształcenia Euklidesowe

Przekształcenia Euklidesowe (ang. Euclidean transformation)

Złożenie translacji i obrotów (przekształcenie bryły sztywnej, ang. rigid body transform).

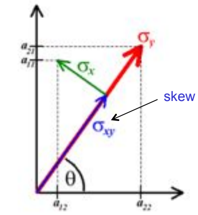
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia 2D - Przekształcenia afiniczne (1)

Przekształcenie afiniczne (ang. affine transform)

Złożenie translacji, obrotów i skalowania.
- Zachowują równoległość linii.
- Zachowują wybraną płaszczyznę przekształcenia.

Definiowane przez sześć parametrów aij.

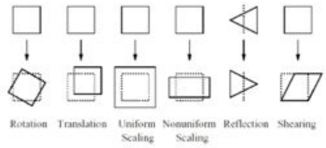


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xy}\sin\theta + \sigma_x\cos\theta & \sigma_{xy}\cos\theta - \sigma_x\sin\theta & t_x \\ \sigma_y \sin\theta & \sigma_y\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pictures courtesy of MIT (lecture 6.837)

Przekształcenia 2D - Przekształcenia afiniczne (2)

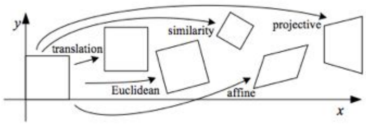
Przykładowe przekształcenia afiniczne



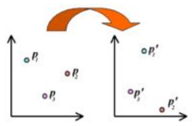
Source: Dave Mount, U. Maryland, Notes for CMSC 427, Fall 2000

Przekształcenia 2D - Podsumowanie

Name	Matrix	# D.O.F.	Preserves:	Icon
translation	$\left[\, I \mid t \,\right]_{2\times 3}$	2	orientation + ···	
rigid (Euclidean)	$\left[\, R \mid t \,\right]_{2\times 3}$	3	lengths + ···	
similarity	$\left[\, sR \mid t \,\right]_{2\times 3}$	4	angles + ···	
affine	$\left[\, A \,\right]_{2\times 3}$	6	parallelism + ···	
projective	$\left[\, \tilde{H} \,\right]_{3\times 3}$	8	straight lines	



Przekształcenia 2D - Przekształcenia afiniczne (3)



Współrzędne trzech punktów wraz z odpowiadającymi im punktami po przekształceniu jednoznacznie definiują przekształcenie afiniczne.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ y_2' \\ x_3' \\ y_3' \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{a}$$

Parametry przekształcenia afinicznego szuka się poprzez rozwiązanie układu równań liniowych.

Pictures courtesy of MIT (lecture 6.837)

Przekształcenia geometryczne 3D

Punkt (ang. point) - wartość absolutna
Wektor (ang. vector) - wartość względna
Ramka (ang. frame) - układ współrzędnych
Współrzędne (ang. coordinates)

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \dot{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \dot{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

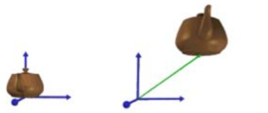
Iloczyn wektorowy i skalarny

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \bar{c} \qquad \begin{aligned} \bar{a}\cdot\bar{c} &= 0 \\ \bar{b}\cdot\bar{c} &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \alpha$$

Translacja w 3D

Przesunięcie o zadany wektor.



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

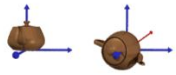
$$T^{-1}(t) = T(-t)$$

Pictures courtesy of MIT (lecture 6.837)

Obrót w 3D

Obrót wokół danej osi o zadany kąt

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = R^T$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pictures courtesy of MIT (lecture 6.837)

Skalowanie w 3D

$$S(s) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1}(s) = S(\frac{1}{s})$$

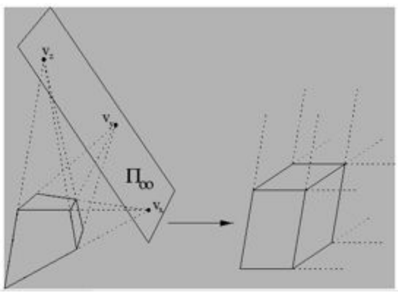
Projekcja (homografia)

$$\mathbf{T}_P \sim \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

- Współczynniki skalowania muszą być niezerowe.
- Transformacja ma 15 stopni swobody.

Projekcja -> przekształcenie afiniczne

Linie równoległe to linie przecinające się w nieskończoności. Przecięcie się wszystkich równoległych linii sześcianu wyznacza płaszczyznę w nieskończoności. Znając tą płaszczyznę można przejść z projekcji do reprezentacji afinicznej.



Przekształcenie afiniczne 3D

Przekształcenie nie wpływa na płaszczyznę położoną w nieskończoności (ang. plane at infinity). Punkty położone na tej płaszczyźnie zmieniają swoje położenie, ale cały czas leżą na płaszczyźnie.

$$\mathbf{T}_A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

- Zachowuje równoległość linii.
- Transformacja ma 12 stopni swobody.

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \quad \text{with } \det(a_{ij}) \neq 0$$

Przekształcenie metryczne

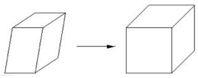
Przekształcenie euklidesowe + skalowanie (ang. metric, similarity).

$$\mathbf{T}_M \sim \begin{bmatrix} \sigma r_{11} & \sigma r_{12} & \sigma r_{13} & t_X \\ \sigma r_{21} & \sigma r_{22} & \sigma r_{23} & t_Y \\ \sigma r_{31} & \sigma r_{32} & \sigma r_{33} & t_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \sigma^{-1} t_X \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \sigma^{-1} t_Y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \sigma^{-1} t_Z \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^{-1} \end{bmatrix}$$

- 7 stopni swobody (3 - obroty, 3 translacje, 1 - skalowanie)
- zachowuje równoległość linii
- zachowuje kąty
- zachowuje wymiary względne

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{14} \\ t_{24} \\ t_{34} \end{bmatrix}$$

- [rij] - macierz obrotu (ortonormalna)
- [ti] - translacja
- σ - skalowanie



Bez znajomości rzeczywistych (absolutnych) wymiarów, jest to najbardziej złożone przekształcenie możliwe do odtworzenia z serii obrazów.

Przekształcenie Euklidesowe

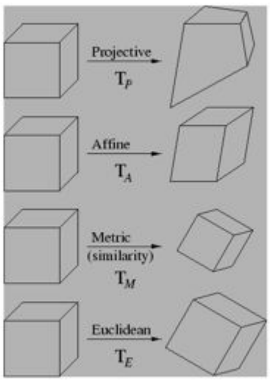
Transformacja bryły sztywnej (ang. rigid body transform) - złożenie translacji i obrotów. Nie zmienia się kształt bryły.

$$\mathbf{T}_E \sim \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_X \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_Y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 6 stopni swobody,
- zachowuje równoległość linii,
- zachowuje kąty,
- zachowuje wymiary absolutne.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_x \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenie 3D



Literatura

1. Materiały edukacyjne organizacji ACM SIGGRAPH, http://www.siggraph.org/education/materials/HyperGraph
2. "Lecture notes on Graphics. Lecture 6.837", Computer Graphics Group, Massachusetts Institute of Technology, http://groups.csail.mit.edu/graphics/classes/6.837/F01/notes.html.